ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGUYỄN THỊ QUỲNH HOA

ĐỊNH LÝ NHỊ THỨC SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 8460113

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS. NÔNG QUỐC CHINH

Thái Nguyên, 04/2019

Mục lục

Mở đầu

Ta đã biết hệ số nhị thức xuất hiện trong định lý nhị thức khi thực hiện lũy thừa bậc n của một tổng (nhị thức Newton)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Các hệ số nhị thức $\binom{n}{k}$ được xác định rất cụ thể ở vị trí thứ k, hàng thứ n của tam giác Pascal. Lấy modulo 2 của các số hạng của tam giác Pascal (hay các hệ số nhị thức) ta thu được tam giác Sierpinski.

Năm 2014, H.D. Nguyen [4] đã trình bày một định lý tương tự định lý nhị thức đó là Định lý nhị thức số. Ký hiệu $s(m)$ là tổng tất cả các ký tự trong biểu diễn nhị phân của m. Khi đó Định lý nhị thức số được phát biểu như sau: Với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có

$$(x+y)^{s(m)} = \sum_{\substack{0 \le k \le m \\ (k, m-k) \text{ carry-free}}} x^{s(k)} y^{s(m-k)}.$$

Một năm sau đó, H.D. Nguyen [5] đã mở rộng kết quả trên dưới dạng định lý nhị thức số tổng quát, mà định lý nhị thức là một trường hợp riêng của định lý này.

Luận văn này, chúng tôi chọn đề tài "Định lý nhị thức số" để làm nội dung nghiên cứu. Mục tiêu của luận văn là trình bày lại các kết quả về định lý nhị thức thông qua hai bài báo bằng tiếng Anh của H.D. Nguyen là [4, 5]. Ngoài ra, chúng tôi cũng trình bày một kết quả khác liên quan tới hệ số nhị thức, đó là phép biến đổi nhị thức của một dãy số dựa vào một bài báo của Klaudiusz Wójcik [7].

Ngoài phần Bảng ký hiệu, Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, bố cục của luận văn được chia làm ba chương.

Chương 1. Định lý nhị thức số. Chương này trình bày định lý nhị thức và định lý nhị thức dạng số hóa dựa theo hàm tổng kí tự.

Chương 2. Định lý nhị thức số tổng quát. Trong chương này ta trình bày định lý nhị thức số tổng quát cho cơ số $b \geq 2$ bất kỳ bằng cách xây dựng ma trận một tham số của ma trận Sierpinski tổng quát. Ngoài ra, chúng ta trình bày một công thức mới cho hệ số của đa thức Prouhet–Thue–Morse.

Chương 3. Ứng dụng của định lý nhị thức số. Trong chương này ta trình bày biến đổi nhị thức $T(a)$ của dãy Dold.

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của PGS. TS Nông Quốc Chinh. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, động viên, chỉ bảo hướng dẫn tận tình của thầy Nông Quốc Chinh.

Tác giả xin chân thành cảm ơn tới các thầy cô giáo phòng Đào tạo, các thầy cô giáo khoa Toán Tin, cũng như các thầy cô giáo đã tận tâm giảng dạy, hướng dẫn, giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn này.

Cuối cùng tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã luôn quan tâm, động viên và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập để tác giác hoàn thành hóa học và hoàn thiện luận văn.

Xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019

Người viết luận văn

Nguyễn Thị Quỳnh Hoa

Chương 1

Định lý nhị thức số

Nội dung của chương này là trình bày định lý nhị thức và định lý nhị thức dạng số hóa dựa theo hàm tổng kí tự. Bên cạnh cách chứng minh định lý nhị thức số dạng số hóa tương tự như định lý nhị thức, ta còn có thể chứng minh nó dựa theo công thức ma trận suy rộng một tham số của tam giác Sierpinski.

1.1 Định lý nhị thức

Định nghĩa 1.1.1 ([6])**.** Cho n, m là số nguyên không âm. Hệ số nhị thức được định nghĩa bởi

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} \dfrac{n!}{m!(n-m)!}, & n \geq m; \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

Ví dụ, $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$ và $\binom{7}{9} = 0$. Hệ số nhị thức $\binom{n}{m}$ ký hiệu số tổ hợp chập m của n phần tử phân biệt. Nguồn gốc của tên gọi hệ số nhị thức xuất phát từ định lý quan trọng sau.

Định lý 1.1.2 (Định lý nhị thức, [6])**.** *Hệ số của $x^{n-k}y^k$ trong khai triển của $(x+y)^n$ là $\binom{n}{k}$. Nói cách khác, ta có công thức*

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n. \quad (1.1)$$

Chứng minh. Ta chứng minh kết quả bằng phương pháp qui nạp theo n. Với $n = 0, 1$ công thức hiển nhiên đúng. Giả sử công thức đúng với n. Ta chỉ ra nó đúng với $n+1$. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y) = \Big[\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r y^{n-r}\Big](x+y)$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{r+1} y^{n-r} + \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{r} y^{n-r+1}$$
$$= \binom{n}{0} y^{n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] x y^{n} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] x^{2} y^{n-1} + \cdots$$
$$+ \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] x^{n} y + \binom{n}{n} x^{n+1}$$
$$= \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} x^{r} y^{n+1-r}.$$

Từ đó suy ra $(x+y)^{n+1} = \sum\limits_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} x^r y^{n+1-r}$. Vậy ta suy ra công thức đúng với $n+1$. Tóm lại, công thức đúng với mọi số nguyên không âm n. □

Ta có thể áp dụng định lý nhị thức theo nhiều cách khác nhau để thu được các công thức khác nhau liên quan đến hệ số nhị thức. Ví dụ, thay $x = y = 1$, thì ta được

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Hệ quả 1.1.3. *Cho x là số thực bất kỳ. Khi đó, ta có*

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r.$$

Hệ số nhị thức thỏa mãn nhiều công thức quan trọng.

Định lý 1.1.4 ([6])**.** *Hệ số nhị thức thỏa mãn các công thức sau:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \tag{1.2}$$
$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}; \textit{ (đẳng thức Pascal)} \tag{1.3}$$
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n. \tag{1.4}$$

Chứng minh. Theo định nghĩa ta có:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k!)} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

Xét đẳng thức

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}.$$

Chia cả hai vế của đẳng thức với $(n-1)!$ rồi nhân cả hai vế của đẳng thức với $(k-1)!(n-k-1)!$, đẳng thức trở thành

$$\frac{n}{k(n-k)} = \frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}.$$

Đẳng thức trên đúng nên (1.3) đúng.

Thay $x = y = 1$ vào công thức hệ số nhị thức ta thu được (1.4). □

Định lý 1.1.5 ([6])**.** *Hệ số nhị thức $\binom{n}{m}$ là số nguyên với mọi $n \geq 0$.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Vì $\binom{0}{m} = 0$ là một số nguyên, định lý đúng với $n = 0$. Giả sử định lý đúng vói mọi số nguyên không âm $< k$. Khi đó, $\binom{k-1}{r-1}$ và $\binom{k-1}{r}$ là số nguyên. Nên tổng của chúng $\binom{k-1}{r-1} + \binom{k-1}{r}$ là số nguyên theo đẳng thức Pascal. Do đó, theo nguyên lý quy nạp, tất cả các hệ số nhị thức đều là số nguyên. □

Hệ quả 1.1.6 ([6])**.** *Tích của r số nguyên liêp tiếp chia hết cho $r!$.*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh hệ quả với số nguyên dương. Gọi n là số nhỏ nhất trong r số. Vì

$$\frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r}.$$

Theo Định lý 1.1.5, $\dfrac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!}$ là số nguyên nên $n(n+1)\cdots(n+r-1)$ chia hết cho $r!$. □

Bổ đề 1.1.7 (Gould, [3])**.**

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{x+k}{k}\binom{y+n-k}{n-k} = \binom{x+y+n+1}{n}. \tag{1.5}$$

Chứng minh. Gould [3] tìm ra (1.5) làm một trường hợp riêng của công thức tích chập Vandermonde. Ta sẽ chứng minh (1.5) một cách trực tiếp bằng công cụ tổ hợp. Ký hiệu A là tập chứa x phần tử phân biệt, B là tập chứa y phần tử phân biệt và $C = \{0, 1, \ldots, n\}$ là tập chứa $n+1$ phần tử phân biệt, trong đó n là một số nguyên dương. Với số nguyên không âm k bất kỳ, định nghĩa $A_k = A \cup \{0, \ldots, k-1\}$ và $B_k = B \cup \{k+1, \ldots, n\}$. Cho tập con S bất kỳ gồm n phần tử của $A \cup B \cup C$, tồn tại duy nhất số nguyên k_S thuộc $C - S$, được gọi là chỉ số của S đối với A và B, sao cho $|S \cap A_{k_S}|$ và $|S \cap B_{k_S}| = n - k_S$. Để thấy điều này, định nghĩa $S_A = A \cap S, S_B = B \cap S$, và $T = C - S$. Ta bắt đầu bằng việc xóa $|S_A|$ phần tử liên tiếp khỏi T theo thứ tự tăng dần và bắt đầu từ phần tử nhỏ nhất, để thu được tập T'. Sau đó, ta xóa $|S_B|$ phần tử liên tiếp khỏi T', theo thứ tự giảm dần bằng đầu từ phần tử lớn nhất của nó để thu được tập con T'', và bây giờ phải chứa một phần tử đơn ký hiệu bởi k_S. Bây giờ rõ ràng $|S \cap A_{k_S}| = k_S$ và $|S \cap B_{k_S}| = n - k_S$.

Để chứng minh (1.5), ta đếm các tập con n phần tử S của $A \cup B \cup C$ theo hai cách. Một mặt, vì $|A \cup B \cup C| = x + y + n + 1$, số tập con S là $\binom{x+y+n+1}{n}$. Mặt khác, ta chia tất cả các tập n phần tử như này thành hai phần bằng nhau theo giá trị chỉ số của tập các tập con đó. Vì $|S \cap A_k| = k$ và $|S \cap B_k| = n - k$, suy ra số tập con S có cùng chỉ số k là $\binom{x+k}{k}\binom{y+n-k}{n-k}$ và tổng số tập con S là

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{x+k}{k}\binom{y+n-k}{n-k}.$$

Cuối cùng, cân bằng hai đáp án ta thu được (1.5). □

Bổ đề 1.1.8 ([5]). *Cho p và q là hai số nguyên dương với $p \leq q$. Khi đó ta có*

$$\sum_{v=q}^{p} \binom{x+p-v-1}{p-v}\binom{y+v-q-1}{v-q} = \binom{x+y+p-q-1}{p-q}. \tag{1.6}$$

Chứng minh. Đặt $k = v - q$ và $n = p - q$. Khi đó (1.6) có thể được viết lại thành

$$\sum_{w=0}^{p-q} \binom{x+p-q-w-1}{p-q-w}\binom{y+w-1}{w} = \binom{x++y+p-q-1}{p-q},$$

nên đúng theo Bổ đề 1.1.7. □

1.2 Biểu diễn nhị phân của số nguyên

Trong hệ thập phân, ta biểu diễn số sử dụng các kí tự $\{0, 1, \ldots, 9\}$ với cơ số 10, tức là số được biểu diễn thành tổng của các lũy thừa của 10. Ví dụ,

$$238_{10} = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0.$$

Tổng quát, biểu diễn thập phân của số X có dạng

$$X = \sum_i d_i \cdot 10^i, \quad (d_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}).$$

Máy tính không biểu diễn số bằng hệ thập phân, thay vào đó, máy tính biểu diễn số bằng hệ nhị phân. Tất cả các phép toán, tính chất của phép cộng, phép trừ, phép nhân và phép chia đều đúng với hệ nhị phân. Trong *hệ nhị phân*, ta chỉ có hai kí tự 0 và 1. Do đó, ta nói các số trong hệ nhị phân được biểu diễn với cơ số 2, tức là một số bất kỳ được biểu diễn thành tổng của các lũy thừa của 2. Ví dụ,

$$11010_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0.$$

Tổng quát, biểu diễn nhị phân của số X có dạng

$$X = \sum_i d_i \cdot 2^i, \quad (d_i \in \{0, 1\}).$$

Việc chuyển một số nhị phân sang số thập phân là đơn giản. Ta chỉ cần tính tất cả các lũy thừa của 2 rồi cộng các số này lại. Ví dụ,

$$11010_2 = 16 + 8 + 2 = 26.$$

Để chuyển một số từ hệ thập phân sang hệ nhị phân thì phức tạp hơn. Ở đây ta chỉ xét chuyển số nguyên sang dạng nhị phân. Nhắc lại rằng, một số nguyên biểu diễn bởi

$$b_{m-1}b_{m-2}\dots b_2b_1b_0, \quad b_i = 0 \text{ hoặc } 1$$

có giá trị

$$b_{m-1} \cdot 2^{m-1} + b_{m-2} \cdot 2^{m-2} + \cdots + b_1 \cdot 2^1 + b_0.$$

Giả sử ta muốn chuyển số nguyên thập phân N sang dạng nhị phân. Nếu ta chia N cho 2 trong dạng thập phân, và thu được thương N_1 và phần dư R_0, ta có thể viết

$$N = 2 \cdot N_1 + R_0, \quad R_0 = 0 \text{ hoặc } 1.$$

Tiếp theo, ta chia N_1 cho 2. Giả sử thương mới là N_2 và phần dư mới là R_1. Khi đó

$$N_1 = 2 \cdot N_2 + R_1, \quad R_1 = 0 \text{ hoặc } 1$$

nên

$$N = 2(2N_2 + R_1) + R_0 = N_2 \cdot 2^2 + R_1 \cdot 2^1 + R_0.$$

Nếu tiếp theo ta có

$$N_2 = 2N_3 + R_3$$

thì

$$N = N_3 \cdot 2^3 + R_2 \cdot 2^2 + R_1 \cdot 2^1 + R_0.$$

Bởi vì $N > N_1 > N_2 > \dots$, tiếp tiếp dãy này sau cùng sẽ sinh ra thương $N_{m-1} = 1$ (ngoại trừ với số thập phân 0 và 1, mà có biểu diễn nhị phân tương ứng là 0 và 1) và phần dư R_{m-2} là 0 hoặc 1. Khi đó, ta có

$$N = 1 \cdot 2^{m-1} + R_{m-2} \cdot 2^{m-2} + \cdots + R_2 \cdot 2^2 + R_1 \cdot 2^1 + R_0$$

chính là biểu diễn nhị phân của N. Do đó, ta chuyển từ hệ 10 sang hệ 2 bằng cách thực hiện liên tiếp phép chia cho 2. Phần dư và thương cuối cùng 1 theo thứ tự là biểu diễn nhị phân của N.

Ví dụ 1.2.1. Tìm biểu diễn nhị phân của 241. Áp dụng thuật toán bên trên ta có

Thương	Phần dư	Giải thích
241		
120	1	$241 = 120 \cdot 2 + 1$
60	0	$120 = 60 \cdot 2 + 0$
30	0	$60 = 30 \cdot 2 + 0$
15	0	$30 = 15 \cdot 2 + 0$
7	1	$15 = 7 \cdot 2 + 1$
3	1	$7 = 3 \cdot 2 + 1$
1	1	$3 = 1 \cdot 2 + 1$
0	1	$1 = 0 \cdot 2 + 1$

Do đó,

$$241_{10} = 11110001_2.$$

Chúng ta liệt kê biểu diễn nhị phân của số nguyên không âm từ 0 đến 11:

$$\begin{array}{ll}
0 = 0_2 & 6 = 110_2 \\
1 = 1_2 & 7 = 111_2 \\
2 = 10_2 & 8 = 1000_2 \\
3 = 11_2 & 9 = 1001_2 \\
4 = 100_2 & 10 = 1010_2 \\
5 = 101_2 & 11 = 11000_2.
\end{array}$$